I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Zvláštní kalkulačka má pouze dvě funkční tlačítka. Po stisknutí prvního tlačítka se k číslu na displeji přičte jedna, po stisknutí druhého tlačítka se číslo na displeji vynásobí dvěma. Na displeji po každém stisknutí tlačítka svítí správný výsledek.

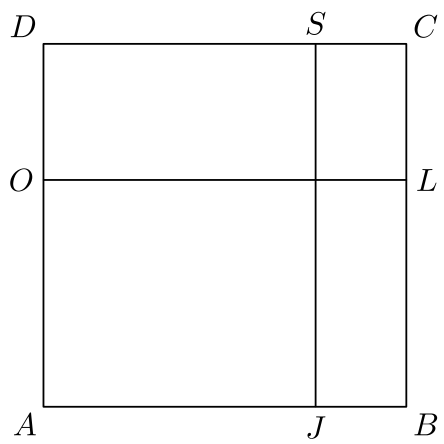
Najděte dva způsoby, jak pomocí šesti stisknutí tlačítek dostat na displeji z čísla 1 číslo 15. (*I. Jančigová*)

Z5–I–2

U zámku je čtvercový park se stranou délky 240 metrů. Po stranách čtverce vedou cesty, v jeho vrcholech stojí akát, buk, cedr a dub. Park křižují dvě další cesty rovnoběžné s cestami po jeho stranách — jedna vede od javoru ke studánce, druhá vede od lípy k ořechu. Princezna při svých procházkách parkem chodila jen po cestách, nikde se nevracela, ani zbytečně neodbočovala a zjistila, že:

- procházka od buku ke studánce kolem javoru, akátu, ořechu a dubu je dvakrát delší než kolem lípy a cedru.
- procházka od buku ke studánce kolem lípy a cedru je stejně dlouhá jako procházka od dubu k lípě kolem studánky a cedru.

Jak dlouhá je přímá cesta od akátu k ořechu? (*M. Macko*)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

Z5–I–3

Danka a Janka každá pro sebe nasbíraly jahody. Kdyby měla Janka o polovinu víc jahod, než nasbírala, měla by jich stejně jako Danka. Kdyby měla Janka dvakrát víc jahod, než nasbírala, měla by jich o 48 víc než Danka.

Kolik jahod nasbírala Janka a kolik Danka? (*M. Dillingerová*)

Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz

Z5–I–4

Anežka správně vynásobila určité číslo sedmi a výsledné pětimístné číslo napsala na papír. Papoušek Fráňa kus papíru vykloval a první číslice výsledku se tak stala nečitelnou. Na zbytku papíru zůstalo napsáno 2887.

Jaká mohla být první číslice Anežčina výsledku? Najděte všechny možnosti.

(*M. Petrová*)

Z5–I–5

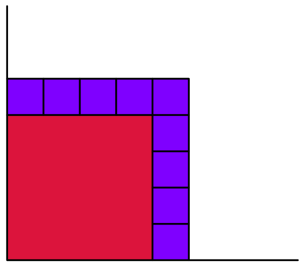
Věky sedmi kamarádů jsou 8, 9, 10, 11, 11, 13 a 14 roků. Tři kamarádi jsou zrovna v kině, dva jsou na fotbale a dva doma. Součet věků těch v kině je 30 roků, součet věků těch na fotbale je 24 roků. Každý z kamarádů na fotbale má víc roků než Ondřej, který zůstal doma.

Kolik roků může mít Ondřej? Najděte všechny možnosti. (*M. Macko*)

Z5–I–6

Čtyři děvčata dláždila čtvercovými dlaždicemi terasu v rohu dvoru. Viola používala dlaždice se stranou 1 dm, Růžena se stranou 2 dm, Blanka se stranou 3 dm a Karmen se stranou 4 dm. První z děvčat položila jednu ze svých dlaždic do rohu. Druhá položila své dlaždice podél volných stran předchozí dlaždice a přidala jednu navíc, aby vznikl čtverec (viz obrázek). Obdobným způsobem položilo své dlaždice třetí a nakonec i čtvrté děvče. Takto vznikla čtvercová terasa bez mezer a překryvů.

V jakém pořadí mohla děvčata pokládat dlaždice a kolik dlaždic celkem použila? Najděte všechny možnosti. (*M. Macko*)



I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

V následujícím sčítacím algebrogramu odpovídají různá písmena různým číslicím, stejná stejným:

$$\begin{array}{r} TONA \\ ONA \\ NA \\ A \\ \hline 8\,6\,5\,4 \end{array}$$

Nahraďte písmena číslicemi tak, aby byl výpočet správný. Najděte všechny možnosti.

(*I. Jančigová*)

Z6–I–2

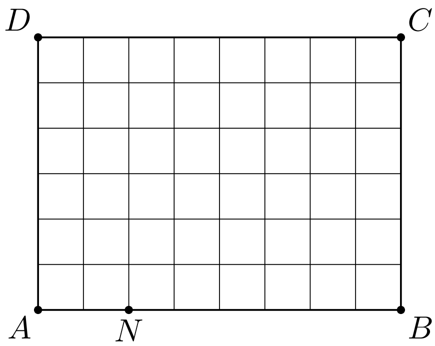
Od 1. ledna byl pan Novák zaměstnán v nové práci. Nástupní výše jeho platu byla 1 550 eur měsíčně. Protože se osvědčil, od jistého měsíce v prvním půlroce mu byl zvýšen plat o celý počet eur. Za celý rok si vydělal 20 000 eur.

Za který měsíc si pan Novák poprvé vydělal více a o kolik? Určete všechny možnosti.

(*M. Macko*)

Z6–I–3

Vrcholy obdélníku $ABCD$ jsou mřížovými body čtvercové sítě a bod N je mřížovým bodem na straně AB:



Rozdělte obdélník $ABCD$ třemi úsečkami se společným bodem N na čtyři části se stejnými obsahy.

(*D. Kovalčíková*)

Z6–I–4

Veronika dostala jedno trojmístné a jedno dvojmístné číslo. Trojmístné číslo zaokrouhlila na stovky a dvojmístné zaokrouhlila na desítky. Rozdíl zaokrouhlených čísel byl 500.

Jaký nejmenší a jaký největší mohl být rozdíl nezaokrouhlených čísel? (*M. Macko*)

Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz

Z6–I–5

Peťa má ke každému dnu v týdnu přiřazenu barvu: pondělí modrou, úterý zelenou, středě bílou, čtvrtku červenou, pátku oranžovou, sobotě šedou a neděli hnědou. V těchto barvách nosí i ponožky, a to tak, že na pravé noze má ponožku barvy dne, avšak na levé noze nemá ponožku barvy tohoto dne, ani dne následujícího. (Např. v sobotu má na pravé noze šedou ponožku a na levé nemá šedou, ani hnědou.)

Určete, který je den, jestliže předevčírem měl Peťa na levé noze modrou ponožku, včera měl červenou a dnes má hnědou. (*M. Dillingerová*)

Z6–I–6

Obdélníkový park má obvod 228 metrů. Ve vrcholech obdélníku a na jeho stranách rostlo 38 okrasných keřů tak, že vzdálenosti mezi každými dvěma sousedními keři byly stejné. Na dvou protilehlých stranách obdélníku zasadil zahradník mezi každé dva keře jeden další. Tím zvýšil počet keřů po obvodu parku na 60.

Určete rozměry parku. (*M. Macko*)

75. ročník Matematické olympiády (2025/26)

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Kolik existuje čtyřmístných čísel takových, že jejich třetina, polovina, dvojnásobek a trojnásobek jsou všechno čtyřmístná čísla? (*M. Macko*)

Z7–I–2

V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je bod G středem úhlopříčky AE.

Určete poměr obsahů trojúhelníku ADG a šestiúhelníku $ABCDEF$.

(*E. Semerádová*)

Z7–I–3

Pan Komický, Elegantní a Vážný se znají z golfu. Jeden se jmenuje Karel, jeden Erik a jeden Viktor. Jeden nosí kravatu barvy krémové, jeden barvy ebenové a jeden barvy vínové.

- Výherce posledního utkání nosí ebenovou kravatu.
- Pan Elegantní nebyl nikdy na návštěvě u pana Komického.
- Viktor nosí krémovou kravatu.
- Panu Komickému připadá vtipné, že nikdy nevyhrál.
- Karel byl po posledním utkání u pana Komického.
- Pan Vážný nosí vínovou kravatu.

Zjistěte, jaké je vlastní jméno každého z pánů a jakou kdo nosí kravatu.

(*E. Novotná*)

Z7–I–4

Adéla, Beáta, Šárka a Jitka si natrhaly třešně. Beáta jich měla pětkrát víc než Adéla, Šárka měla o 15 třešní víc než Beáta, Jitka měla o 200 víc než Adéla.

O kolik nejméně se mohly lišit počty třešní Šárky a Jitky? A kolik třešní by v takovém případě měla každá z dívek? (*K. Pazourek*)

Z7–I–5

Václav měl několik bílých kostek. Na každé kostce nabarvil tři různé stěny třemi různými barvami, a to červenou, zelenou a modrou. Poté roztřídil kostky do skupin podle typu obarvení tak, že všechny kostky v jedné skupině vypadaly po vhodném otočení stejně.

Kolik nejvýše skupin mohl Václav vytvořit? (*I. Jančigová*)

Z7–I–6

Pro čtyřúhelník $ABCD$ platí:

- strana AD a úhlopříčka BD jsou shodné,
- úhlopříčka BD a strana DC jsou kolmé,
- strany AB a BC jsou kolmé,
- osa úhlu BDC a strana AD jsou kolmé.

Určete velikost úhlu BCD. (*M. Macko*)

Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p_1, p_2, p_3, pro která platí

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_3 - p_1) = 195.$$

(*E. Novotná*)

Z8–I–2

Pro rovnoběžníky $ABCD$ a $KLMN$ platí:

- bod K je středem úsečky CD,
- bod K je průsečíkem přímky CD s osou úsečky BC,
- bod L je průsečíkem přímky AB s osou úsečky CD,
- bod N je průsečíkem přímky AB s osou úsečky BC,
- úhel BAD má velikost $60°$.

Určete poměr obsahů rovnoběžníků $ABCD$ a $KLMN$. (*M. Macko*)

Z8–I–3

Tomáš sbírá pohlednice z Islandu, Anglie a Norska. Z každé země má alespoň jednu pohlednici, celkem jich má 40. Pohlednic z Anglie má více než pohlednic z Norska. Pohlednic z Islandu má více než pětinásobek a méně než šestinásobek počtu pohlednic z Anglie.

Ze kterých zemí jsou pohlednice, jejichž počet v Tomášově sbírce lze určit jednoznačně?

(*E. Novotná*)

Z8–I–4

Žáci napsali první písemku s průměrným hodnocením 84 bodů. Stejní žáci napsali druhou písemku s průměrným hodnocením 70 bodů. Čtyři z těchto žáků měli v obou písemkách po 63 bodech. Průměrné hodnocení ostatních žáků ve druhé písemce bylo 72 bodů.

Určete průměrné hodnocení ostatních žáků v první písemce. (*I. Jančigová*)

Z8–I–5

Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 6 cm a přímka p procházející bodem S. Sestrojte obdélník $ABCD$ tak, aby platilo:

- vrcholy A a B leží na přímce p,
- kružnice k se dotýká strany CD,
- kružnice k protíná stranu AD v bodě K a stranu BC v bodě L,
- $|AK| = |CL| = 1{,}5$ cm.

(*M. Petrová*)

Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz

Z8–I–6

Jonáš a Michal sestavili každý svůj osmiboký jehlan s devíti různými čísly na jeho různých stěnách. Všechna čísla byla větší než 10 a menší než 30. Součet čísel na všech stěnách obsahujících libovolný vrchol byl násobkem čtyř, přitom žádné číslo násobkem čtyř nebylo. Jonáš tvrdil, že na dvou bočních stěnách má čísla 14 a 15. Michal tvrdil, že na dvou bočních stěnách má čísla 14 a 17.

Kdo z chlapců měl pravdu? (*K. Pazourek*)

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Do rohových políček tabulky 3×3 jsou vepsána čísla jako na obrázku:

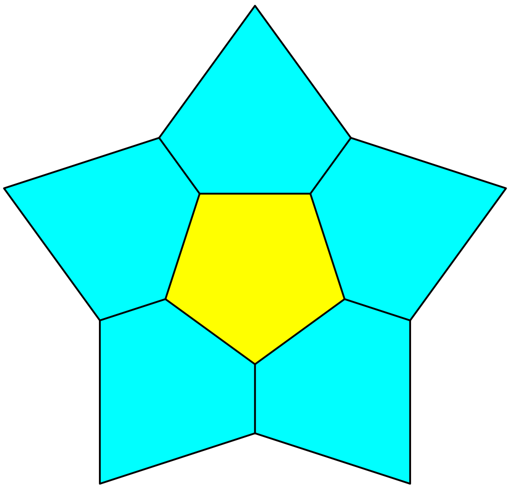
3		6
12		15

Do prázdných políček doplňte přirozená čísla tak, aby součin čísel ve všech řádcích a sloupcích byl stejný. Najděte všechny možnosti. (*J. Zhouf*)

Z9–I–2

Útvar na obrázku je vytvořen z pěti shodných azurových kosočtverců a jednoho žlutého pravidelného pětiúhelníku, který kosočtverce částečně překrývá. Kosočtverce sousedí celými stranami a na nich leží vrcholy pětiúhelníku. Poměr velikostí poloměru kružnice opsané pětiúhelníku a strany kosočtverce je $4 : 7$.

Rozhodněte, zda nepřekrytá část každého kosočtverce má větší, stejný, nebo menší obsah než pětiúhelník. (*M. Dományová*)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

Z9–I–3

Na tabuli je napsáno několik po sobě jdoucích přirozených čísel počínaje jedničkou. Každé z těchto čísel má buď azurovou, nebo žlutou barvou. Součet každých dvou různobarevných čísel je prvočíslem, součet každých dvou stejnobarevných čísel je složeným číslem.

Kolik nejvíce čísel může být napsáno na tabuli? (*P. Bak*)

Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz

Z9–I–4

Přirozené číslo se nazývá *čtverečkové*, pokud jeho dekadický zápis obsahuje číslici nebo skupinu po sobě jdoucích číslic, jež jsou dekadickým zápisem druhé mocniny přirozeného čísla. (Např. čísla 257 a 725 jsou čtverečková, čísla 275 a 572 nikoli.)

Určete počet všech dvojmístných čtverečkových čísel. (*M. Dillingerová*)

Z9–I–5

V lyžařském oddíle se počet všech dětí snížil o 10 %, přitom poměr děvčat vůči všem dětem vzrostl z 50 % na 55 %.

O kolik procent se změnil počet děvčat? (*I. Jančigová*)

Z9–I–6

Kružnice k a l se zvnějšku dotýkají a poloměr kružnice k je stejný jako průměr kružnice l. Bod S je středem kružnice k, bod T je bodem dotyku kružnic, bod A leží na kružnici l mimo spojnici středů kružnic a bod M je středem úsečky AS.

Dokažte, že úhel ATM je pravý. (*L. Komín*)